M, ∇

Lezione 23

In carte: $\nabla_v X = v^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} e_j + v^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k$

- Dipende solo da $X|_\gamma$ con γ curva $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$

- $\gamma : I \to M \qquad X : I \to TM \qquad X(t) \in T_{\gamma(t)} M$

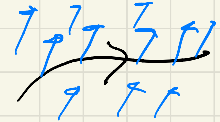
Teo: Esiste un modo ragionevole di definire

$$D_t X : I \to TM$$

Il campo $D_t X$ in carte è determinato da:

In carte $X : I \to \mathbb{R}^n$

$$D_t X = \frac{dX}{dt} + \gamma'(t)^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k$$

Se γ è embedded:  è ben definito

" γ " immersione $\Rightarrow$ loc. è emb. $\Rightarrow$ " " "

$$v = \gamma'(t) \qquad \gamma'(t)^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} e_j = \frac{dX}{dt}$$

<u>TRASPORTO PARALLELO</u>: X è PARALLELO se $D_t X = 0$

<u>In carte</u>:

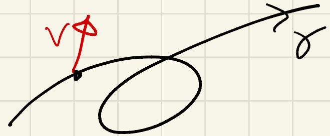
$$\frac{dX}{dt} + \gamma'(t)^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k = 0$$

$$\frac{dX}{dt} = -\gamma'(t)^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k$$

Sistema di eq. differenziali lineari

$\Rightarrow$ le soluzioni formano sp. vett. su tutto il dominio.

Teo:



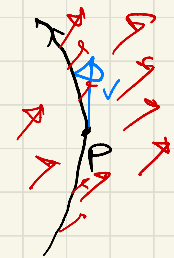
$\exists!\, X : I \to TM$ parallelo che estende v

$$\Gamma(\gamma)_{t_0}^{t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$$

isomorfismo

(M, ∇) DERIVATA COVARIANTE DI CAMPI TENSORIALI

$T \in \Gamma\, \tau_h^k(M)$



$\tau_h^k T_p M$

Teo: In carte T $(1,2)$ $\nabla_v T \in \tau_1^2 T_p M$

$$(\nabla_v T)^i_{jk} = v^l \frac{\partial T^i_{jk}}{\partial x^l} + v^l T^m_{jk} \Gamma^i_{lm} - v^l T^i_{mk} \Gamma^m_{lj} - v^l T^i_{jm} \Gamma^m_{lk}$$

$$\nabla_v X = v^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \mathbf{e}_j + v^i X^j \Gamma^k_{ij} \mathbf{e}_k$$

$$(\nabla_v X)^k = v^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i} + v^i X^j \Gamma^k_{ij} = v^i \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + X^j \Gamma^k_{ij} \right)$$

Esempio: ω 1-forma ω_i

$$\boxed{(\nabla_v \omega)_j = v^\ell \frac{\partial \omega_j}{\partial x^\ell} - v^\ell \omega_m \Gamma^m_{\ell j}}$$

g campo $(0,2)$ (es: tensore metrico)

$$\boxed{(\nabla g)_{ij} = v^\ell \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} - v^\ell g_{kj} \Gamma^k_{\ell i} - v^\ell g_{ik} \Gamma^k_{\ell j}}$$

Proprietà della derivata covariante:

Teo: 1) Se $T \equiv U$ in un intorno di $p \Rightarrow \nabla_v T = \nabla_v U$

2) $\nabla_v T$ è $\mathbb{R}$-lineare in v e in T

Leibnitz 3) $\nabla_v (T \otimes U) = \nabla_v T \otimes U + T \otimes \nabla_v U$

4) liscezza $\Big(\nabla_X T$ è campo tensoriale $\forall X \in \mathfrak{X}(U)\ \forall T \in \Gamma \mathcal{T}^k_h(U) \Big)$

5) ∇ commuta con le contraz.

È possibile interpretare ∇ come un

$$\nabla : \Gamma(\mathcal{T}^k_h(M)) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{T}^k_{h+1}(M)) \quad \text{lineare}$$

$$T \longmapsto (X \longmapsto \nabla_X T)$$

In coordinate: $T^{\ i}_{jk} \longrightarrow (\nabla T)^{\ i}_{jk;l} = \nabla_l T^{\ i}_{jk}$ ∇T

$$(\nabla_l T)^{\ i}_{jk} = \frac{\partial T^{\ i}_{jk}}{\partial x^l} + T^{\ m}_{jk} \Gamma^{\ i}_{lm} - T^{\ i}_{mk} \Gamma^{\ m}_{lj} - T^{\ i}_{jm} \Gamma^{\ m}_{lk}$$

Esempio: $\quad X \in \mathfrak{X}(M) \dashrightarrow \nabla X \in \Gamma\, \mathcal{T}_1^1(M)$

$\big\downarrow$ traccia (contrazione)

$\operatorname{div} X \in \mathcal{C}^\infty(M)$

In coordinate: $\boxed{\operatorname{div} X = \nabla_i X^i}$

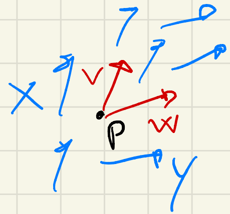
TORSIONE

(M, ∇) **Def**: La TORSIONE di ∇ è un campo tensoriale

$T \in \Gamma\, \mathcal{T}_1^2(M)$ di tipo $(1,2)$ definito nel modo seguente:

Dati $p \in M$, $v, w \in T_pM$, $\rightsquigarrow T(p)(v,w) \in T_pM$

Prendo X, Y campi definiti in $U(p)$ che estendono v, w



$$T(p)(v,w) = \nabla_v Y - \nabla_w X - [X,Y](p)$$

<u>Prop</u>: $T(p)(v,w)$ non dipende dalle estensioni X e Y

$$\nabla_v Y = v^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} e_j + v^i Y^j \Gamma_{ij}^k e_k$$

$$\nabla_w X = w^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} e_j + w^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k$$

$$[X,Y](p) = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} e_j - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} e_j$$

$$\nabla_v Y - \nabla_w X - [X,Y](p) = v^i Y^j \Gamma_{ij}^k e_k - w^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k$$

$$= v^i w^j \Gamma_{ij}^k e_k - w^i v^j \Gamma_{ij}^k e_k \qquad \square$$

Abbiamo visto che $T(p)(v,w) = v^i w^j \Gamma_{ij}^k e_k - w^i v^j \Gamma_{ij}^k e_k$

$$T(p)(v,w) = v^i w^j \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \right) e_k$$

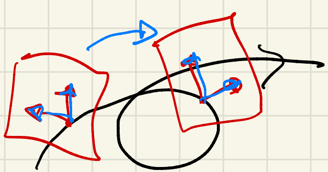
Quindi $\boxed{T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k}$

Def: ∇ è SIMMETRICA se $T \equiv 0$, cioè $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ in ogni carta

Oss: Se $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ in una carta, allora $T \equiv 0$, allora $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ in QUALSIASI carta

Oss: $M \cong N$ $\quad \nabla_M \dashrightarrow \nabla_N$ $\quad \nabla_M$ simm. $\iff \nabla_N$ simm

Def: (M, ∇, g) ∇ è COMPATIBILE con g se



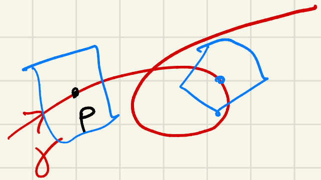
$$\Gamma(\gamma)_{t_0}^{t_1} : T_{\gamma(t_0)} M \to T_{\gamma(t_1)} M$$ è isometria $\forall \gamma, t_0, t_1$

Teo (CONNESSIONE DI LEVI-CIVITA):

Data (M, g) pR, $\exists!\, \nabla$ che sia simmetrica e compatibile con g

Prop: g è compatibile con $\nabla \iff \nabla g = 0$

dim:



$\Rightarrow$ segue dalla definizione di ∇

$\Leftarrow$ " " " "
e dal fatto che se una funzione ha derivata ovunque nulla è costante.

Ricordiamo: $$\boxed{(\nabla_k g)_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - g_{lj}\Gamma^{l}_{ki} - g_{li}\Gamma^{l}_{kj}}$$

g compatibile con $\nabla \iff$ $$\boxed{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = g_{lj}\Gamma^{l}_{ki} - g_{li}\Gamma^{l}_{kj}} \quad (\star)$$

dim (Levi-Civita): (✱) scritta 3 volte con indici i, j, k ciclicamente ripetuti

Quindi scriviamo le prime 2 meno la terza

usiamo anche g_{ij} Γ_{ij}^{k} sono simmetrica

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} = 2 g_{..} \Gamma_{..}^{.}$$

con indici opportuni

Teo: In coordinate otteniamo

$$\boxed{\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right)}$$

l, i, j

Ricordo che $g_{ij} \to g^{ij}$ è l'inversa di g_{ij}, cioè $g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$